Intégrales de Fresnel

131 Dev

Théorème : $\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et $\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Preuve :

Montrons que les intégrales $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\,du$ et $J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi s^2}\,ds$ convergent :

La fonction $u \mapsto \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}$ est continue sur $]0,+\infty[$, il s'agit donc de montrer que les intégrales $I_1 = \int_0^1 \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\,du$ et $I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\,du$ convergent.

Comme $u \mapsto \frac{1}{\sqrt{u}}$ est intégrable sur $]0,1]$ et $\left|\frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{u}}$ $\forall u \in]0,1]$ donc I_1 converge

Soit $A \geq 1$. Les fonctions $u \mapsto \frac{1}{\sqrt{u}}$ et $u \mapsto e^{iu}$ sont $\mathcal{C}^1$, on peut donc faire une IPP :

$$\int_1^A \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\,du = \left[\frac{e^{iu}}{i\sqrt{u}}\right]_1^A + \frac{1}{2i}\int_1^A \frac{e^{iu}}{u^{\frac{3}{2}}}\,du = \frac{e^{iA}}{i\sqrt{A}} - \frac{e^{i}}{i} + \frac{1}{2i}\int_1^A \frac{e^{iu}}{u^{3/2}}\,du \quad (1)$$

Or $\frac{e^{iA}}{i\sqrt{A}} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$ et $u \mapsto \frac{e^{iu}}{u^{3/2}}$ est bornée $\underset{\text{sur } [1,+\infty[}{\text{par}}$ $u \mapsto \frac{1}{u^{3/2}}$ qui est intégrable sur $[1,+\infty[$

Donc (1) admet une limite finie lorsque $A \to +\infty$ donc I_2 converge et I converge.

Le changement de variable $u = 2\pi s^2$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $]0,+\infty[$ vers $]0,\infty[$

D'où $\int_0^{+\infty} e^{2i\pi s^2}\,ds = \int_0^{+\infty} \frac{e^{iu}}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{u}}\,du = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} I$. donc par parité, J converge

2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 1-périodique vérifiant $\forall x \in [0,1[$, $f(x) = e^{2i\pi x^2}$

Montrons que f est somme de sa série de Fourier et $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = e^{-i\pi\frac{n^2}{2}} \int_{-\frac{n}{2}}^{-\frac{n}{2}+1} e^{2i\pi s^2}\,ds$:

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, donc la série de Fourier de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$ d'après Dirichlet.

De plus, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) := \int_0^1 e^{2i\pi x^2} e^{-2i\pi n x}\,dx = \int_0^1 e^{2i\pi(x^2 - nx)}\,dx = \int_0^1 e^{2i\pi\left(\left(x-\frac{n}{2}\right)^2 - \frac{n^2}{4}\right)}\,dx$

$= e^{-i\pi\frac{n^2}{2}} \int_0^1 e^{2i\pi\left(x-\frac{n}{2}\right)^2}\,dx$

Le changement de variable affine $s = x - \frac{n}{2}$ donne :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f) = e^{-i\pi\frac{n^2}{2}} \int_{-\frac{n}{2}}^{-\frac{n}{2}+1} e^{2i\pi s^2}\,ds.$$

3) Calculons J et montrons que les intégrales de Fresnel convergent :

$\forall k \in \mathbb{Z}$, on a $c_{2k}(f) = \int_{-k}^{-k+1} e^{2i\pi s^2} ds$. Comme J converge, la serie $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{2k}(f)$ converge et on a $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{2k}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-k}^{-k+1} e^{2i\pi s^2} ds = J$.

Par ailleurs, f est somme de sa série de Fourier, donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{2i\pi n x}$.

En évaluant en $x=0$ et $x=\frac{1}{2}$, on obtient : $f(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)(-1)^n$

On en déduit que $J = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{2k}(f) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)(1+(-1)^n) = \frac{1}{2}\left(f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1+i}{2}$

En identifiant partie réelle et partie imaginaire dans l'égalité précédente :

On a par parité : $\int_0^{+\infty} \sin(2\pi s^2) ds = \frac{1}{4}$ et $\int_0^{+\infty} \cos(2\pi s^2) ds = \frac{1}{4}$

Pour conclure, on utilise le changement de variable $t = \sqrt{2\pi}\, s$ et on a

$$\int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$